Maxwell-Gleichungen, Lagrange-Dichte und Dissipationsfunktion in der Kontinuumstheorie bewegter Versetzungen

Baumgarte, Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 22, 1970, S. 55-62

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Maxwell-Gleichungen, Lagrange-Dichte und Dissipationsfunktion in der Kontinuumstheorie bewegter Versetzungen

Von **Joachim Baumgarte**
Vorgelegt von **Hermann Schaefer†**

(Eingegangen am 16. 4. 1970)

Übersicht: Die Feldgleichungen der linearen Versetzungstheorie lassen sich in eine Analogie zu den Maxwellschen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes setzen. Das Postulat der „Lokalisierbarkeit der Energie in Raum und Zeit" wird durch das Variationsproblem der stationären Wirkung mit Lagrange-Dichte und Dissipationsfunktion erfüllt. Das Variationsproblem liefert auch die konstitutiven Gleichungen in einer weitgehend allgemeinen Darstellung.

Einfache Annahmen über die Materialgleichungen ermöglichen die Beschreibung der physikalischen Vorgänge in einem Kontinuum, daß außer elastischen Eigenschaften auch viskoses und insbesondere plastisches Verhalten — wobei dies den wandernden Versetzungen zuzuschreiben ist — zeigt.

Summary: The field equations of the linear theory of dislocations may be analogized to the Maxwell-eauations of the elektro-magnetic field. The postulate of "localisation of the energy in space and time" is fulfilled with the problem of variation of the stationary action with Lagrange-density and dissipation function.

The problem of variation also provides the constitutive equations in a far-reaching general representation.

Simple suppositions about the constitutive equations render it possible to describe the physical phenomena in a continuum with not only elastical but also viscous and specially plastical features, which is to be attributed to the moving dislocations.

1. Einleitung

Ausgangspunkt für eine lineare Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen bilden zunächst folgende zwei kinematische Gleichungssysteme [5]:

$$D_{ik} - e_{i\lambda\mu}\,\partial_\lambda\,\beta_{\mu k} = 0\,^{*)} \tag{1.1}$$

$$\partial_i\,v_k - \dot{\beta}_{ik} - I_{ik} = 0 \tag{1.2}$$

Nimmt man noch als drittes und viertes System die dynamischen Gleichungen

$$\dot{\psi}_{ik} - e_{i\lambda\mu}\,\partial_\lambda\,\varphi_{\mu k} + \sigma_{ik} = 0 \tag{1.3}$$

$$\partial_i\,\psi_{ik} + \varrho\,v_k = 0 \tag{1.4}$$

hinzu, so hat man es mit vier Gleichungssystemen vom Maxwell-Typ zu tun.

*) e_{ikl} ist der in allen Indizes alternierende Einheitstensor.

Es bedeuten dabei

β_{ik}	Distorsionstensor,
$\beta_{(ik)} = \varepsilon_{ik}$	Deformationstensor*),
v_k	Vektor der Materiegeschwindigkeit,
ϱ	Massendichte,
σ_{ik}	Spannungstensor,
D_{ik}	Tensor der Versetzungsdichte,
I_{ik}	Tensor der Versetzungsströme.

Aus (1.3) und (1.4) folgt die Gleichgewichtsbedingung

$$\partial_i \sigma_{ik} - \varrho \dot{v}_k = 0 \tag{1.5}$$

In den Bezeichnungen der Maxwellschen Theorie für das elektromagnetische Feld lautet hier offenbar die Analogie [5]:

Lorentz-Viererpotential	A_0, A_i	$\sim v_k, \beta_{ik}$
Stromdichte	s_i	$\sim \sigma_{ik}$
Elektrische Feldstärke	E_i	$\sim I_{ik}$
Magnetische Induktion	B_i	$\sim D_{ik}$
Ladungsdichte	ϱ	$\sim$ negativer Impuls $(-\varrho\, v_k)$
Ladungspotential	D_i	$\sim$ Impulspotential ψ_{ik}
Strompotential	H_i	$\sim$ Spannungspotential φ_{ik}

Bemerkenswert ist, daß die Tensoren der Kontinuumstheorie jeweils eine höhere Stufe als die entsprechenden Tensoren der elektromagnetischen Feldtheorie besitzen.

Für die sieben Funktionen der Kontinuumstheorie

$$v_k,\ \beta_{ik},\ \sigma_{ik},\ \varphi_{ik},\ D_{ik},\ \psi_{ik},\ I_{ik}$$

sind außer den kinematischen und dynamischen Gleichungen (1.1) bis (1.4) noch weitere drei konstitutive Gleichungen anzugeben.

Eine konstitutive Gleichung, nämlich die Beziehung für den Impuls p_k

$$p_k = \varrho\, v_k \tag{1.6}$$

ist bereits in (1.4) und (1.5) enthalten. Würde man in diesen beiden Gleichungen $\varrho\, v_k$ durch p_k ausdrücken, so hätte man die Maxwellschen Gleichungen (1.1) bis (1.4) (und (1.5)) in einer Form dargestellt, in der keine Konstanten oder Parameter mehr erscheinen, die an die Eigenschaften eines besonderen Mediums erinnern.

*) Runde Klammern bedeuten Symmetriesierung, eckige Klammern Antisymmetriesierung

2. Lagrange-Dichte und Dissipationsfunktion

Es wird nun postuliert, daß die Energie in Raum und Zeit lokalisierbar ist, d. h. es soll eine Bilanzgleichung in der Form des Energiesatzes

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \partial_i \Sigma_i + V = 0 \tag{2.1}$$

existieren, wobei W die Energiedichte, Σ_i der Vektor des Energiestromes ist, und durch V die Verluste an elastischer Energie erfaßt werden.

Um dies Postulat von vornherein zu erfüllen, wird von einer Lagrange-Dichte und einer Dissipationsfunktion ausgegangen.

Die Lagrange-Dichte und die Dissipationsfunktion werden so gewählt, daß das Variationsproblem der stationären Wirkung einmal zu einem vollständigen System der Feldgleichungen führt und zum anderen die konstitutiven Gleichungen liefert.

Aus diesen Gründen ist bei der Aufstellung der Lagrange-Dichte folgendes zu beachten:

In L sind die mit Lagrangeschen Multiplikatoren multiplizierten kinematischen Gleichungen (1.1) und (1.2) vorhanden. Multipliziert man (1.1) mit dem Multiplikator $-\varphi_{ik}$ und (1.2) mit $-\psi_{ik}$, so ergibt der Lagrange-Formalismus automatisch die dynamischen Gleichungen (1.3) und (1.4), wenn in L die Glieder $\frac{1}{2}\,\varrho\, v_k\, v_k$ und $-\sigma_{(ik)}\,\beta_{(ik)}$ vorhanden sind, und sonst v_k und β_{ik} — außer in den Nebenbedingungen — nicht mehr vorkommen.

Für den Spannungstensor σ_{ik} ist natürlich die Symmetrie

$$\sigma_{ik} = \sigma_{(ik)} \tag{2.2}$$

zu verlangen, während alle anderen Tensoren keine besonderen Symmetrien besitzen müssen.

Nach diesen Überlegungen kann man für die Lagrange-Dichte L schreiben:

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2}\,\varrho\, v_k\, v_k - \sigma_{(ik)}\,\beta_{(ik)} \\ & - H\,(\sigma_{(ik)}, \dot\sigma_{(ik)}, \partial_l\,\sigma_{(ik)}, \ldots;\; D_{ik}, \dot D_{ik}, \partial_l\, D_{ik}, \ldots;\; I_{ik}, \dot I_{ik}, \partial_l\, I_{ik}, \ldots) \\ & - \varphi_{ik}\,(D_{ik} - e_{i\lambda\mu}\,\partial_\lambda\,\beta_{\mu k}) - \psi_{ik}\,(\partial_i\, v_k - \dot\beta_{ik} - I_{ik}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Es ist hierbei H eine ganz allgemeine skalare Funktion von $\sigma_{(ik)}$, D_{ik} und I_{ik}. Für die Dissipationsfunktion R wird ebenfalls ganz allgemein angesetzt:

$$R = R\,(\dot\sigma_{(ik)},_i\, \dot D_k,\, \dot I_{ik}) \tag{2.4}$$

Die Durchführung des Lagrange-Formalismus liefert natürlich zunächst die kinematischen und dynamischen Gleichungssysteme (1.), (1.2), (1.3), (1.4) und außerdem noch drei konstruktive Gleichungssysteme, die hier in einer weitgehend allgemeinen Form auftreten:

$$\beta_{(ik)} + \frac{\delta H}{\delta \sigma_{(ik)}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\sigma}_{(ik)}} = 0 \tag{2.5}$$

$$\varphi_{ik} + \frac{\delta H}{\delta D_{ik}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{D}_{ik}} = 0 \tag{2.6}$$

$$-\psi_{ik} + \frac{\delta H}{\delta I_{ik}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{I}_{ik}} = 0 \tag{2.7}$$

Es soll noch erwähnt werden, daß die nicht-symmetrische Form aller Gleichungen — im Gegensatz zu der symmetriesierten Form der Gleichungen in der Arbeit von H. Schaefer [5] — bedingt, daß keine Information der Ausgangsgleichungen (1.1), (1.2), (1.3). (1.4) verloren ging.

3. Bewegungsgleichungen bei einfachen Annahmen über die konstitutiven Gleichungen

Es wird nun für H und R ein möglichst einfacher Ansatz gemacht. Dieser wird so gewählt, daß das Kontinuum neben der (durch H beschriebenen) Elastizität auch (durch R beschriebene) Viskosität und Plastizität besitzt. Außerdem soll ein Fließgesetz (und damit auch ein Fließkriterium) analog dem Fließgesetz von v. Mises auftreten, wobei die Plastizität auf die zeitliche Änderung der Versetzungsdichte, also auf den Auf- und Umbau der Versetzungen zurückzuführen ist.

Dieser Ansatz lautet:

$$H = \frac{1}{2} \{\overset{1}{C}_{(ik)\,(lm)}\, \sigma_{(ik)}\, \sigma_{(lm)} + \overset{2}{C}_{iklm}\, D_{ik}\, D_{lm} + \overset{3}{C}_{iklm}\, I_{ik}\, I_{lm}\} \tag{3.1}$$

$$+ \overset{4}{C}_{(ik)\,lm}\, \sigma_{(ik)}\, D_{lm}$$

und

$$R = \frac{1}{2} \overset{5}{C}_{(ik)\,(lm)}\, \dot{\sigma}_{(ik)}\, \dot{\sigma}_{(lm)} + \sqrt{\overset{6}{C}_{iklm}\, \dot{D}_{ik}\, \dot{D}_{lm}} \tag{3.2}$$

Der letzte Ausdruck (Kreuzterm) auf der rechten Seite von (3.1) sorgt dafür, daß ein Fließgesetz analog dem von v. Mises erscheint.

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (3.2) liefert das viskose, der zweite Ausdruck das plastische Verhalten des Kontinuums [6].

Damit erhält man für den jetzt betrachteten Spezialfall neben den allgemeinen Gleichungen (1.1) bis (1.4) an Stelle der Gleichungen (2.4), (2.6) und (2.7):

$$\beta_{(ik)} + \overset{1}{C}_{(ik)(lm)}\,\sigma_{(lm)} + \overset{4}{C}_{(ik)lm}\,D_{lm} + \overset{5}{C}_{(ik)(lm)}\,\dot{\sigma}_{(lm)} = 0 \tag{3.3}$$

$$\varphi_{ik} + \overset{2}{C}_{iklm}\,D_{lm} + \overset{4}{C}_{(lm)ik}\,\sigma_{(lm)} + \frac{\overset{6}{C}_{iklm}\,\dot{D}_{lm}}{\sqrt{\overset{6}{C}_{pqrs}\,\dot{D}_{pq}\,\dot{D}_{rs}}} = 0 \tag{3.4}$$

$$-\psi_{ik} + \overset{3}{C}_{iklm}\,I_{lm} = 0 \tag{3.5}$$

Gleichung (3.4) ist nur gültig im Fall bewegter Versetzungen. Bevor die „Erstarrung" der Versetzungsdichte untersucht wird, soll der Energiesatz (2.1) im Fall bewegter Versetzung abgeleitet werden.

Zu diesem Zweck multipliziert man (1.1) mit $\dot{\varphi}_{ik}$, (1.2) mit $\dot{\psi}_{ik}$, (1.3) mit $\dot{\beta}_{ik}$, (1.4) mit $-\dot{v}_k$, (3.3) mit $\dot{\sigma}_{ik}$, (3.4) mit $\dot{D}_{ik}$ und (3.5) mit $\dot{I}_{ik}$ und addiert alle Gleichungen. Nach einigen Umformungen erhält man dann den Energiesatz in der Form (2.1).

Dabei ergibt sich für W, Σ_i und V:

$$W = \frac{1}{2}\,\varrho\, v_k\, v_k + \sigma_{(ik)}\,\beta_{(ik)} - I_{ik}\,\psi_{ik} + \frac{1}{2}\,\{\overset{1}{C}_{(ik)(lm)}\,\sigma_{(ik)}\,\sigma_{(lm)} + \overset{2}{C}_{iklm}\,D_{ik}\,D_{lm} + \overset{3}{C}_{iklm}\,I_{ik}\,I_{lm}\} + \overset{4}{C}_{(ik)lm}\,\sigma_{(ik)}\,D_{lm} \tag{3.6}$$

$$\Sigma_i = \dot{\psi}_{ik}\,v_k + e_{i\lambda\mu}\,\dot{\beta}_k\,\varphi_{\mu k} \tag{3.7}$$

und

$$V = \overset{5}{C}_{(ik)(lm)}\,\dot{\sigma}_{(ik)}\,\dot{\sigma}_{(lm)} + \sqrt{\overset{6}{C}_{iklm}\,\dot{D}_{ik}\,\dot{D}_{lm}} \tag{3.8}$$

Nun zurück zu den Bewegungsgleichungen:

Gleichung (3.4) stellt die Fließbedingung dar. Man gelangt zu dem Fließkriterium, wenn (3.4) mit dem Tensor $\overset{7}{C}_{\varkappa\beta ik}$ multipliziert wird, wobei $\overset{7}{C}_{\varkappa\beta ik}$ der Bedingung

$$\overset{7}{C}_{\alpha\beta\lambda\mu}\,\overset{6}{C}_{\lambda\mu\gamma\delta}\,\overset{7}{C}_{\varkappa\beta ik}\,\overset{6}{C}_{iklm} = \overset{6}{C}_{\gamma\delta lm} \tag{3.9}$$

genügt.

Setzt man zur Abkürzung

$$\overset{7}{C}_{\alpha\beta ik}\,[\overset{4}{C}_{(lm)ik}\,\sigma_{(lm)} + \varphi_{ik} + \overset{2}{C}_{iklm}\,D_{lm}] = A_{\varkappa\beta} \tag{3.10}$$

dann lautet das Fließkriterium:

$$A_{\alpha\beta}\,A_{\alpha\beta} = 1 \tag{3.11}$$

Die beiden letzten Glieder in der Klammer von (3.10) geben die Bedingung der Verfestigung wieder.

Die Beziehung

$$A_{\alpha\beta}\, A_{\alpha\beta} > 1 \tag{3.12}$$

ist untersagt, aber der Fall

$$A_{\alpha\beta}\, A_{\alpha\beta} < 1 \tag{3.13}$$

ist möglich. Er bedeutet, daß die Versetzungsdichte „erstarrt" ist. Im Fall der erstarrten Versetzung entfällt Gleichung (3.4), denn die Versetzungsdichte D_{ik} ist jetzt nicht mehr variabel. An die Stelle von Gleichung (3.4) tritt jetzt wegen der Bedingung

$$\dot{D}_{ik} = 0 \tag{3.14a}$$

die Beziehung

$$D_{ik} = D_{ik}\,(\boldsymbol{r}) \tag{3.14b}$$

Hierbei ist $D_{ik}\,(\boldsymbol{r})$ zu einer reinen Ortsfunktion, die von der Vorgeschichte des Materials abhängig ist, entartet und muß als vorgegeben angesehen werden.

4. Ausblick

Das Variationsproblem hat mit der Lagrange-Dichte L und der Dissipationsfunktion R in Verbindung mit dem Postulat der „Lokalisierbarkeit der Energie in Raum und Zeit" zu einer vollständigen und in sich geschlossenen Kontinuumstheorie der Versetzungen geführt. Die konstitutiven Gleichungen (3.3), (3.4) und (3.5) konnten in einer weitaus allgemeinen Darstellung angegeben werden.

Bei der Untersuchung eines speziellen Bewegungsvorganges, wobei das Kontinuum — unter relativ einfachen Annahmen über die konstitutiven Gleichungen — neben elastischem auch viskoses und insbesondere plastisches Verhalten zeigt, stellt im Fall bewegter Versetzungen die konstitutive Gleichung für das Spannungspotential φ_{ik} (3.4) auch das Fließgesetz dar.

Im Fall des „Erstarrens" der Versetzungen „entarten" die φ_{ik} zu Spannungsfunktionen, also zu reinen Reaktionskräften*), die ein Umbauen und Abwandern der Versetzungen verhindern und deshalb keine Arbeit verrichten [6]. Durch Divergenzbildung von Gleichung (1.3) können die Spannungsfunktionen φ_{ik} eliminiert werden, da jetzt wegen der Erstarrung der Versetzungen die Gleichung (3.4) nicht mehr gilt.

---

*) In der Statik des Kontinuums sind die Spannungsfunktionen Hilfs- oder Rechengrößen oftmals sehr nützlich, doch prinzipiell entbehrlich.

Im Fall des Fließens der Versetzungen jedoch werden die φ_{ik} zu Spannungspotentialen und damit zu eingeprägten Kräften, die an den wandernden Versetzungen Arbeit leisten. Die konstitutive Gleichung (3.4) drückt die hierbei gültigen physikalischen Beziehungen aus.

Literatur

[1] *Günther, H.:* Zur nichtlinearen Kontinuumstheorie bewegter Versetzungen. Akademie-Verlag, Berlin 1967.

[2] *Kosevich, A. M.:* UFN 84, 579 (1964).

[3] *Kluge, G.:* Int. J. Eng. Sc. 7, 169 (1969).

[4] *Kröner, E.:* „Plastizität und Versetzungen" in Sommerfeld. Mechanik der deformierbaren Medien, 5. Aufl., Leipzig 1964.

[5] *Schaefer, H.:* erscheint in den Acta Mechanica.

[6] *Baumgarte, J.:* in Vorbereitung.

Generalisierte Kontinua mit Mikro-Struktur in $3n$ Dimensionen

Von **Joachim Baumgarte**
Vorgelegt von **Hermann Schaefer** †

(Eingegangen am 3. 2. 1970)

Inhalt

Übersicht: Von der Atomgittertheorie ausgehend, wird durch „Kontinuisierung" ein generalisiertes Gesamtkontinuum erhalten, das aus n ineinanderliegenden durch Kräfte gekoppelten Unterkontinua besteht. In den Bewegungsgleichungen für das $3n$-dimensionale Verschiebungsfeld treten neben n^2 Spannungstensoren, bei denen die endliche Reichweite der atomaren Wechselwirkungskräfte (Nichtlokalität) berücksichtigt wird, auch die Verschiebungsvektoren selbst auf.

Es werden die Symmetriebeziehungen für die Tensorindizes untersucht.

Das Cosserat-Kontinuum wird als ein Sonderfall dieser Theorie abgeleitet.

Das Wellenspektrum zeigt 3 akustische und $3(n-1)$ optische Zweige und ermöglicht die Berechnung der spezifischen Wärme als Funktion der absoluten Temperatur analog einer verallgemeinerten Debye-Theorie.

Summary: Beginning at the lattice theory a generalized total continuum is rendered by continuisation. The total continuum contains n subcontinua which are put into one another and coupled by forces. In the equations of motion for the 3 n-dimensional displacement field there appear next to n^2 stress tensors, where the finite range of atomic forces of interaction (non-localitay) is taken into account, also the displacement vectors.

The symmetry relations of the tensor indices are studied.

The Cosserat-continuum is derived as an exception of this theory.

In the wave spectra there exist 3 acoustical and 3 (n—1) optical branches and thereby allow for the derivation of the specific heat as a function of the absolute temperature in analogy with a generalized Debye-theory.